

2015/11/25

الموضوع:

1.2

1- **تعميم** لنفرض R حلقا غير لبي فوق الحلقا R عنده
أيضا $n \in \mathbb{N}$ فان

$$D(D^n A) = D^{n+1} A$$

2- **أيضا** فان $n, m \in \mathbb{N}$

$$D^m(D^n A) = D^{m+n} A$$

البرهان «نبدأ بالحالت بالاستقراء على n »

1- **الاستقراء على n**

$$n=0 \quad D(D^0 A) = D A$$

$$n=1 \quad D(D^1 A) = D[D A, A] = D^2 A$$

نفرض ان $k \in \mathbb{N}$ فان

$$D(D^k A) = D^{k+1} A$$

$$D(D^{k+1} A) = D([D^k A, D^k A]) = [D^k A, D^k A] + [D^k A, D^k A]$$

$$= [D^{k+1} A, D^{k+1} A] = D^{k+2} A$$

وبت الملائمة

2- **الاستقراء على m**

لأن $m=1$ الملائمة هي $[1]$

نفرض ان العلاقة هي لـ m

عنيت

$$D^{m+1}(D^n A) = [D^m(D^n A), D^m(D^n A)]$$

$$[D^{m+n} A, D^{m+n} A] = D^{(m+1)+n} A$$

وبت فان الملائمة هي

ليكن A غير لي فوق الحلقة R ، I مثالي من A .
الشروط الآتية متكافئة:

1. الجبر A قابل للكل.

2. لكل من I ، A/I قابل للكل.

البرهان:

(1) \Rightarrow (2) واضح، مبرهن سابقاً.

(2) \Rightarrow (1)

لتقرهت أن لكل من I ، A/I قابل للكل.

عندئذٍ يوجد $n, m \in \mathbb{N}$ بحيث

$$D^n I = 0 \quad \text{و} \quad D^m (A/I) = 0 = I$$

نأخذ التماثل الناصر $\pi: A \rightarrow A/I$

فإنه يتبع $\pi(D^m A) = D^m(\pi(A)) = D^m(A/I) = 0$

$$\pi(D^m A) = D^m(\pi(A)) = D^m(A/I) = 0$$

ومن ثم

$$D^m(A/I) = D^m(A+I)$$

لمبرهن على أن

$$D^n(A+I) = D^n A + I$$

$$n=0 \quad D^0(A+I) = A+I = (D^0 A) + I$$

$$n=1 \quad D^1(A+I) = [A+I, A+I] = [A, A] + I = (D^1 A) + I$$

لتفكر أنها صحيحة لكل k

$$\begin{aligned} D^{k+1}(A+I) &= [D^k(A+I), D^k(A+I)] = [(D^k A) + I, (D^k A) + I] \\ &= [D^k A, D^k A] + I = (D^{k+1} A) + I \end{aligned}$$

ومن ثمة:

$$D^m(A/I) \neq D^m(A+I) = D^m A + I = I$$

$$D^m A \subseteq I$$

$$D^{m+n}A = D^n(D^m A) \in D^n I = 0$$

وبذلك الجبر A حيدري قابل للحل.

نريد إثبات أن $f: A \rightarrow A'$ يتطابق مع f على $I \subseteq \ker f$ ، إذا كان $I \subseteq \ker f$ عندئذ يوجد تطابق $\theta: A/I \rightarrow A'$ حيث $\theta \pi = f$ حيث $\pi: A \rightarrow A/I$ هو التطابق.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A' \\ \pi \searrow & & \nearrow \theta \\ & A/I & \end{array}$$

نريد إثبات أن $\theta \pi = f$ حيث π تطابق قانوني.

لنفرض $\theta: A/I \rightarrow A'$ بالشكل الآتي

$$\forall a+I \in A/I, \quad \theta(a+I) = f(a)$$

أن θ دالة جيدة لأن $a \in I$ فإن

$$a+I, b+I \in A/I, \quad a+I = b+I$$

$$(a-b)+I = I$$

$$f(a-b) = 0 \iff a-b \in I \subseteq \ker f$$

$$f(a) = f(b)$$

$$\theta(a+I) = \theta(b+I)$$

وبذلك θ دالة جيدة.

وبذلك $a \in I$ فإن

$$\theta \pi(a) = \theta(\pi(a)) = \theta(a+I) = f(a)$$

نريد إثبات أن $\theta \pi = f$ حيث π تطابق قانوني.

$$\theta \pi = f$$

نريد إثبات أن $\mu: A/I \rightarrow A'$ حيث $\mu \pi = f$ حيث π تطابق قانوني.

$$\mu \pi = f$$

لنكن $a+I \in A/I$ عندها

$$\mu(a+I) = \mu(\pi(a)) = \rho(a) = \theta \pi(a) = \theta(a+I)$$

وهذا يعني $\theta = \mu$

مبدأ الثالث: الحالة الثانية

لنكن A مبدل فوق الحلقة R ، I, J مثاليين في A عندها

$$(I+J)/J \cong I/(I \cap J)$$

نعرّف $f: I \rightarrow I+J$

البرهان: لنرى العلاقة بين التماثلات:

$\forall a \in I, f(a) = a+J$

إن f تطبيق واريثا تماثل عبور لن
أريثا f ظاهر لأن $\bar{z} \in (I+J)/J$ إذا كان $\bar{z} \in I+J/J$ عندها

$$\bar{z} = z+J, z \in I+J$$

عندها $z = a+b, a \in I, b \in J$

$$\bar{z} = z+J = (a+b)+J$$

$$= (a+J) + \underbrace{(b+J)}_J = a+J$$

وهذا يعني $f(a) = a+J = \bar{z}$

$$\frac{I}{\text{Ker } f} \cong \frac{I+J}{J}$$

لنرى أن $\text{Ker } f = I \cap J$ وبذلك المطلوب

النتيجة الخامسة